

1. MANEJO DE SUMATORIOS. PROPIEDADES Y EJERCICIOS.

El **sumatorio** (o sumatoria) es un operador matemático, representado por la letra griega sigma mayúscula (Σ) que permite representar de manera abreviada sumas con muchos sumandos, con un número indeterminado (representado por alguna letra) de ellos, o incluso con infinitos sumandos.

Los sumandos de un sumatorio se expresan generalmente como una variable (habitualmente x, y, z, \dots) cuyos valores dependen de un índice (habitualmente $i, j, k \dots$) que toma valores enteros. El índice empieza tomando el valor que aparece en la parte inferior del sumatorio **y se va incrementando en una unidad** hasta llegar al valor que aparece en la parte superior del sumatorio. Así por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^3 x_i = x_1 + x_2 + x_3$$

representa la suma de los valores de la variable x desde el primero hasta el tercero. En general,

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n$$

representa la suma de los primeros n valores de la variable x . La expresión anterior se lee: “sumatorio de x sub- i desde i igual a 1 hasta n ”.

El índice del sumatorio puede tomar cualquier conjunto de números enteros, es decir, no tiene por qué empezar en 1, (aunque en las expresiones que aparecen a continuación casi siempre sea así para simplificar la notación). La única condición que se tiene que cumplir es que el primer valor del índice, el que aparece abajo, sea menor o igual que el último valor del índice, el que aparece arriba. Es decir, en la suma $\sum_{i=k}^n x_i$ k tiene que ser menor o igual que n para que la suma tenga sentido. Si k fuera mayor que n , por ejemplo, $k = 5$ y $n = 3$, estaríamos sumando los de x empezando en 5 hasta llegar a 3, es decir, no estaríamos sumando nada, y la suma sería igual a cero. Si queremos sumar los valores de x desde 3 hasta 5, deberemos tomar $n = 5$ y $k = 3$, es decir, hacer $\sum_{i=3}^5 x_i$.

1.1. Propiedades.

El sumatorio es simplemente una manera abreviada de representar una suma, y por lo tanto, cumple todas las propiedades de ésta:

- Propiedad conmutativa:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) &= x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_n + y_n \\ &= y_1 + x_1 + y_2 + x_2 + \dots + y_n + x_n = \sum_{i=1}^n (y_i + x_i) \end{aligned}$$

- Propiedad asociativa:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) + \sum_{i=1}^n z_i &= x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_n + y_n + z_1 + z_2 + \dots + z_n \\ &= x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_1 + z_1 + y_2 + z_2 + \dots + y_n + z_n = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n (y_i + z_i) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) \end{aligned}$$

- Propiedad distributiva:

$$a \cdot \sum_{i=1}^n x_i = a \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$= ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n = \sum_{i=1}^n (ax_i), \quad a \in \mathbb{R}$$

- Otras propiedades:

1. El sumatorio de una constante (no depende de ningún índice) es igual a la constante multiplicada por el número de sumandos:

$$\sum_{i=1}^n b = b + \overset{n \text{ veces}}{b} + \dots + b = nb, \quad b \in \mathbb{R}$$

2. Propiedad asociativa + propiedad distributiva + (1):

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b) = \sum_{i=1}^n ax_i + \sum_{i=1}^n b = a \sum_{i=1}^n x_i + nb, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Nota: ¡¡¡ $a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + nb \neq a \cdot \sum_{i=1}^n (x_i + nb)$!!! En un sumatorio, los sumandos vienen indicados por el primer símbolo después de Σ . Si cada sumando involucra más de un término, tendremos que escribir la expresión del sumando entre paréntesis. Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^3 i^2 + 5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5 = 1 + 4 + 9 + 5 = 19,$$

mientras que

$$\sum_{i=1}^3 (i^2 + 5) = 1^2 + 5 + 2^2 + 5 + 3^2 + 5 = 1 + 5 + 4 + 5 + 9 + 5 = 29.$$

3. Los valores recorridos por el índice se pueden separar en varios sumatorios:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^{n_0} x_i + \sum_{i=n_0+1}^n x_i, \quad n_0 \leq n$$

En efecto:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_{n_0}) + (x_{n_0+1} + \dots + x_n)$$

Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^4 \log(i) = \log(1) + \log(2) + \log(3) + \log(4) = (\log(1) + \log(2)) + (\log(3) + \log(4))$$

$$= \sum_{i=1}^2 \log(i) + \sum_{i=3}^4 \log(i) \quad (\text{aquí } n = 4 \text{ y } n_0 = 2).$$

Nota: Todas las propiedades descritas son válidas independientemente del conjunto de valores que tome el índice del sumatorio. Es decir, sin en vez de $\sum_{i=1}^n$ tenemos $\sum_{i=k}^n$, para cualquier valor de $k \leq n$, las propiedades anteriores se aplican exactamente igual.

1.1.1. Igualdades que NO cumplen los sumatorios.

A continuación se enumeran algunas de las igualdades que NO son ciertas al operar con sumatorios (y que constituyen errores muy habituales):

1. $\sum_{i=1}^n x_i y_i \neq \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)$ ya que en el lado izquierdo de la desigualdad estamos sumando los valores de x multiplicados por su correspondiente valor de y :

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

y en el lado derecho de la desigualdad estamos sumando **todos** los valores de x multiplicados por **todos** los valores de y :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + \dots + x_1 y_n + x_2 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_2 y_n + x_n y_1 + x_n y_2 + \dots + x_n y_n.$$

2. $\sum_{i=1}^n x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$ ya que en el lado izquierdo de la desigualdad estamos sumando los valores de x elevados al cuadrado:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

mientras que en el lado derecho de la desigualdad estamos sumando todos los valores de x y **luego** estamos elevando **toda la suma** al cuadrado:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + \dots + 2x_1 x_n + 2x_2 x_3 + \dots + 2x_2 x_n + \dots + 2x_{n-1} x_n.$$

3. En general, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no lineal (es decir, no es una recta, involucra operaciones distintas de la suma y el producto por escalares), entonces

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \neq f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right).$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 i^3 &\neq \left(\sum_{i=1}^5 i\right)^3 \\ \sum_{n=1}^{10} \ln(n) &\neq \ln\left(\sum_{n=1}^{10} n\right) \\ \sum_{k=1}^7 \sqrt{z_k} &\neq \sqrt{\sum_{k=1}^7 z_k}. \end{aligned}$$

1.2. Sumatorios dobles (o triples, cuádruples, etc.).

Si la variable cuyos valores queremos sumar depende de dos (o tres, cuatro, etc.) índices utilizaremos un sumatorio doble (o triple, cuádruple, etc.). Por ejemplo, dada una matriz cuadrada $n \times n$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,(n-2)} & a_{1,(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,(n-2)} & a_{2,(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,(n-2)} & a_{3,(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-2),1} & a_{(n-2),2} & a_{(n-2),3} & \dots & a_{(n-2),(n-2)} & a_{(n-2),(n-1)} & a_{(n-2),n} \\ a_{(n-1),1} & a_{(n-1),2} & a_{(n-1),3} & \dots & a_{(n-1),(n-2)} & a_{(n-1),(n-1)} & a_{(n-1),n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,(n-2)} & a_{n,(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

los elementos de A dependen de dos índices: el índice i que denota las filas y el índice j que representa las columnas. Así, si queremos sumar todos los elementos de A , tendremos que sumar primero los elementos de cada fila, y luego sumar los n valores resultantes. Es decir, la suma de todos los elementos se puede escribir como: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$. En efecto, si desarrollamos primero el sumatorio en j y luego el sumatorio en i se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} &= \sum_{i=1}^n (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}) \\ &= (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n}) + \dots + (a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn}). \end{aligned}$$

Nota: los índices de los dos (o más) sumatorios no tienen por qué tomar los mismos valores. Por ejemplo, si sólo quiero sumar los elementos de la matriz A que están por encima de la diagonal (en negrita)

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} & \dots & \mathbf{a_{1,(n-2)}} & \mathbf{a_{1,(n-1)}} & \mathbf{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} & \dots & \mathbf{a_{2,(n-2)}} & \mathbf{a_{2,(n-1)}} & \mathbf{a_{2n}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \mathbf{a_{3,(n-2)}} & \mathbf{a_{3,(n-1)}} & \mathbf{a_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-2),1} & a_{(n-2),2} & a_{(n-2),3} & \dots & a_{(n-2),(n-2)} & \mathbf{a_{(n-2),(n-1)}} & \mathbf{a_{(n-2),n}} \\ a_{(n-1),1} & a_{(n-1),2} & a_{(n-1),3} & \dots & a_{(n-1),(n-2)} & a_{(n-1),(n-1)} & \mathbf{a_{(n-1),n}} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,(n-2)} & a_{n,(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

en cada fila i tengo que considerar sólo los elementos a_{ij} con $j > i$ (ó $j \geq i + 1$). Por lo tanto escribiré:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_{ij} &= \sum_{i=1}^n (a_{i,i+1} + a_{i,i+2} + \dots + a_{in}) \\ &= (a_{12} + a_{13} + \dots + a_{1n}) + (a_{23} + a_{24} + \dots + a_{2n}) + \dots + (a_{(n-2),(n-1)} + a_{(n-2),n}) + a_{(n-1),n}. \end{aligned}$$

OJO: Cuando i es igual a n , la suma $\sum_{j=i+1}^n a_{ij}$ no contiene ningún sumando puesto que el índice j tendría que ir desde $n + 1$ hasta n , lo cual no es posible. Esto sólo quiere decir, que en la última fila, $i = n$, no tenemos ningún elemento por encima de la diagonal.

Análogamente, la suma de los elementos por debajo de la diagonal se escribe: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$. En este caso, para $i = 1$ la suma $\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ no contiene ningún sumando puesto que el índice j tendría que ir desde 1 hasta 0, lo cual no tiene sentido. Es decir, en la primera fila, $i = 1$, no hay elementos por debajo de la diagonal.

La traza de A , o lo que es lo mismo, la suma de los elementos de la diagonal de A , se podría escribir como: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij}$, es decir, sumamos aquellos elementos para los cuales el número de su fila y su columna coinciden. En este sumatorio doble, para cada valor de i el segundo índice, j , toma un único valor: $j = i$. En este caso, podemos prescindir de j y escribir la suma con un sumatorio simple de la siguiente manera: $\sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Nota: Si los índices de los dos sumatorios i y j toman los mismos valores, se escribir los dos índices en un único símbolo de sumatorio de la siguiente forma, $\sum_{i,j=1}^n$, indicando que tanto i como j van desde 1 hasta n . Así, podemos escribir el doble sumatorio en forma compacta:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}.$$

1.2.1. Propiedades de los sumatorios dobles

- Propiedad conmutativa:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} + y_{ij}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_{ij} + x_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (y_{ij} + x_{ij}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (x_{ij} + y_{ij}) \end{aligned}$$

- Propiedad asociativa:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n y_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} + y_{ij})$$

- Propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} a \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a \cdot \sum_{i=1}^n (x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}) \\ &= a \cdot [(x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n}) + \dots + (x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn})] \\ &= (ax_{11} + ax_{12} + \dots + ax_{1n}) + \dots + (ax_{n1} + ax_{n2} + \dots + ax_{nn}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ax_{ij}, \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Otras propiedades:

1. El sumatorio doble de una constante (no depende de ningún índice) es igual a la constante multiplicada por el número de sumandos al cuadrado:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b &= \sum_{i=1}^n (b + b + \dots + b) = \sum_{i=1}^n nb \\ &= (nb + nb + \dots + nb) = n \cdot nb = n^2b, \quad b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Propiedad asociativa + propiedad distributiva + (1):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (ax_{ij} + b) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ax_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b \\ &= a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + n^2b, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Se verifica que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right)$, ya que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j = \sum_{i=1}^n (x_i y_1 + x_i y_2 + \dots + x_i y_n)$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1y_1 + x_1y_2 + \dots + x_1y_n) + (x_2y_1 + x_2y_2 + \dots + x_2y_n) + \dots + (x_ny_1 + x_ny_2 + \dots + x_ny_n) \\
&= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_n).
\end{aligned}$$

OJO: Esto se cumple porque x sólo depende de i e y sólo depende de j . Si ambas variables dependieran de ambos índices, esto no sería cierto (ver desigualdad 1 más abajo).

Nota: Todas las propiedades descritas son válidas independientemente de los conjuntos de valores que tomen los dos índices del sumatorio. Es decir, sin en vez de $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n$ tenemos $\sum_{i=k}^n \sum_{j=\ell}^m$, para cualquier valor de $k \leq n$, y cualquier valor de m y $\ell \leq m$, las propiedades anteriores se aplican exactamente igual.

1.2.2. Igualdades que NO cumplen los sumatorios dobles.

A continuación se enumeran algunas de las igualdades que NO son ciertas al operar con sumatorios dobles (y que constituyen errores muy habituales):

1. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}y_{ij} \neq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij} \right)$ ya que en el lado izquierdo de la desigualdad estamos sumando los valores de x multiplicados por sus correspondientes valores de y :

$$x_{11}y_{11} + x_{12}y_{12} + \dots + x_{1n}y_{1n} + x_{21}y_{21} + x_{22}y_{22} + \dots + x_{2n}y_{2n} + \dots + x_{n1}y_{n1} + x_{n2}y_{n2} + \dots + x_{nn}y_{nn},$$

pero en el lado derecho estamos sumando **todos** los valores de x multiplicados por **todos** los valores de y :

$$(x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + \dots + x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn}) \cdot (y_{11} + y_{12} + \dots + y_{1n} + y_{21} + y_{22} + \dots + y_{2n} + \dots +$$

2. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 \neq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2$ ya que en el lado izquierdo de la desigualdad estamos sumando los valores de x elevados al cuadrado:

$$x_{11}^2 + x_{12}^2 + \dots + x_{1n}^2 + \dots + x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + \dots + x_{nn}^2,$$

mientras que en el lado derecho de la desigualdad estamos sumando todos los valores de x y luego estamos elevando **toda la suma** al cuadrado:

$$(x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + \dots + x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn})^2,$$

que involucra todos los términos de la suma anterior y muchos más.

3. En general, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no lineal (es decir, no es una recta, involucra operaciones distintas de la suma y el producto por escalares), entonces

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_{ij}) \neq f \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \right).$$

Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^6 (i+j)^3 \neq \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^6 (i+j) \right)^3$$

$$\sum_{n=1}^{10} \sum_{k=1}^3 \ln(n^k) \neq \ln \left(\sum_{n=1}^{10} \sum_{k=1}^3 n^k \right)$$

$$\sum_{\ell=1}^{10} \sum_{h=i}^{\ell} \frac{1}{z_{\ell h}} \neq \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{10} \sum_{h=i}^{\ell} z_{\ell h}}.$$

2. Ejemplos.

Ejemplo 2.1 La suma de todos los números pares desde 1 hasta 100 se escribe:

$$\sum_{i=1}^{50} 2i.$$

Ejemplo 2.2 La suma de todos los números impares desde 1 hasta 100 se escribe:

$$\sum_{i=1}^{50} (2i - 1).$$

Ejemplo 2.3 La suma de los 1000 primeros números se escribe:

$$\sum_{n=1}^{1000} n,$$

además, podemos calcular cuánto vale esta suma:

$$\sum_{n=1}^{1000} n = \frac{1001 \cdot 1000}{2} = 500500.$$

En general, para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1) \cdot n}{2}.$$

Por ejemplo, para $n = 1$, $\sum_{i=1}^1 i = 1$ y $\frac{(n+1) \cdot n}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

Para $n = 2$, $\sum_{i=1}^2 i = 1 + 2 = 3$ y $\frac{(n+1) \cdot n}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$.

Comprueba la fórmula para el resto de números naturales menores o iguales que 10.

3. Ejercicios.

Ejercicio 3.1 Calcula las siguientes sumas:

a) $\sum_{i=1}^5 i(i+1)$

b) $\sum_{n=0}^3 2^n$

c) $\sum_{r=1}^{100} 4r$

$$d) \sum_{h=-3}^{10} (6h - 1)$$

$$e) \sum_{z=2}^4 \log(z^4)$$

Ejercicio 3.2 Expresa con una frase el significado de las siguientes sumas:

Ejemplo: $\sum_{p=1}^5 3p$ es la suma de todos los múltiplos de 3 desde el 3 hasta el 15.

$$a) \sum_{s=1}^{10} s^2$$

$$b) \sum_{q=1}^n \frac{x_q}{n}$$

$$c) \sum_{\tilde{n}=0}^{49} (2\tilde{n} + 1)$$

Ejercicio 3.3 Expresa con un sumatorio las siguientes frases:

- La suma de los 10 primeros números pares.
- La suma de todos los múltiplos de 4 desde 36 hasta 80.
- La suma de la raíz cuadrada de los 20 primeros números impares.
- La suma de los cuadrados de todos los números naturales del 1 al 30.
- El producto escalar de los vectores (t_1, t_2, \dots, t_m) y (w_1, w_2, \dots, w_m) .

Ejercicio 3.4 La siguiente tabla recoge los valores de una variable f , indexada por dos índices e y d :

$e \setminus d$	1	2	3
1	-4	4	-8
2	1	9	12
3	6	-3	5
4	0	6	2
5	-2	7	0

Calcula:

$$a) \sum_{e=1}^5 \sum_{d=1}^3 f_{ed}$$

$$b) \sum_{e=1}^5 \sum_{d < e} f_{ed}$$

$$c) \sum_{e=1}^5 \sum_{d=e}^3 f_{ed}$$

$$d) \sum_{e=1}^5 \sum_{d=1}^3 f_{ed}^2$$

$$e) \sum_{e=1}^3 \sum_{d=1}^3 (3f_{ed}^2 - 28)$$

$$f) \sum_{e=1}^3 \sum_{d=1}^3 (2f_{ed} - 1)^2$$

Ejercicio 3.5 La siguiente tabla recoge los valores de dos variables u y v medidas sobre 6 individuos:

Individuo	u	v
1	-4	2
2	-1	6
3	5	3
4	0	1
5	-2	-4
6	1	1

Calcula:

$$a) \sum_{a=1}^6 \sum_{b=1}^6 u_a v_b$$

$$b) \sum_{a=1}^6 \sum_{b=1}^3 (u_a + v_b)$$

$$c) \sum_{a=1}^3 \sum_{b=a}^6 (u_a + v_b)$$

$$d) \sum_{a=1}^6 \sum_{b=1}^6 u_a v_a$$

$$e) \sum_{a=1}^6 \sum_{b=1}^6 (2u_a^2 + v_b)$$

$$f) \sum_{a=1}^6 \sum_{b=1}^a (u_a - v_b)$$